УДК 519.816

Алферов Г. В., Малафеев О. А., Мальцева А С.

Динамическая модель проведения инспекций

1. Постановка задачи. В настоящее время метод математического моделирования получил широкое распространение, польза от построения и исследования с помощью математических моделей в целях анализа и прогноза всевозможных процессов в естественных, технических, экономических и других науках общепризнана [1–7]. Члены террористичеких групп, наркомафии, коррумпированных сообществ используют в своей противоправной деятельности современные средства связи и передвижения. При этом возникает необходимость проводить инспекционные мероприятия для их пресечения. Для организации успешного противодействия следует прибегать к использованию современных технических средств и аппарата оптимизации использования ресурсов, разрабатывать динамические модели проведения инспекций. Рассмотрим следующую ситуацию. Корабль-перехватчик, оснащенный эхолотом, обнаружил перископ подводной лодки, которая в этот же момент, опустившись под воду, стала перемещаться в неизвестном направлении с неизвестной скоростью. Необходимо перехватить лодку за минимально возможное время [8]. Предполагается, что корабль-перехватчик не знает точно скорость подводной лодки, но ему известен дискретный набор скоростей, одна из которых является действительной скоростью подводной лодки. Далее корабль-перехватчик будем называть преследователем, а подводную лодку — убегающим и обозначать соответственно P и E.

2. Алгоритм отыскания оптимальной траектории преследователя и времени перехвата. Опишем алгоритм спирального поиска и нахождения времени поиска в условиях, когда преследователю достоверно неизвестна скорость убегающего [9]. Предположим,

Алферов Геннадий Викторович – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alferovgv@gmail.com, тел.: +7(921)906-60-42

Малафеев Олег Алексеевич – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: malafeyevoa@mail.ru, тел.: +7(904)644-38-85

Мальцева Анастасия Сергеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: luna171@mail.ru, тел.: +7(911)750-63-49

что скорость преследователя намного больше скорости убегающей лодки. В начальный момент обнаружения P точно определяет местоположение подводной лодки. Таким образом, преследователю известно расстояние между ним и убегающим. Обозначим его через D_0. Для нахождения времени поимки необходимо определить траекторию, по которой должен двигаться корабль-перехватчик. Введем полярную систему координат (ρ, ϕ, O) таким образом, чтобы полюс находился в точке обнаружения подводной лодки, а полярная ось проходила через точку, в которой находился корабль-перехватчик. Тогда динамика убегающего описывается уравнениями

$$\dot{\rho}^E = v,$$

$$\dot{\phi}^E = 0.$$

Динамика преследователя описывается уравнениями

$$\dot{\rho}^P = \alpha, \quad \|\alpha\| \leqslant v_\rho,$$

$$\dot{\phi}^P = \beta, \quad \|\beta\| \leqslant v_\phi,$$

$$v^P = \sqrt{v^{\rho 2} + v^{\phi 2}}.$$

Преследователю точно неизвестна скорость v, однако известно, что она выбирается из дискретного множества V^E. Максимально возможную скорость корабля-преследователя обозначим через v^P. Преследователь может гарантировать поимку, перебрав все элементы множества V^E. Первоначально, корабль делает предположение, что убегающий имеет скорость $v_1 \in V^E$. Для поимки подводной лодки в момент t_0 преследователь начинает движение со скоростью v^P в направлении на точку O и движется так до момента t_1, в который P и E оказываются на одинаковом расстоянии нее, чтобы выполнялось равенство

$$\rho_1^E = \rho_1^P$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1} v_1 dt + v^P(t_1 - t_0) = D_0.$$

С момента t_1 преследователь должен двигаться, выбирая скорость, так, чтобы постоянно находиться на таком же расстоянии от полюса, что и убегающий. Для этого скорость корабля-перехватчика раскладывается на две составляющие: радиальную v_ρ и тангенциальную v_ϕ. Радиальная составляющая — скорость, с которой корабль отдаляется от полюса,

$$v_\rho = \dot{\rho}.$$

Тангенциальная составляющая — это линейная скорость вращения относительно полюса,

$$v_\phi = \dot{\phi}\rho.$$

Для того, чтобы встреча произошла, радиальная составляющая скорости преследователя полагается равной предполагаемой скорости убегающего. Тогда для нахождения траектории преследователя необходимо решить систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\rho}^P = v_1,$$

$$(\dot{\phi}^P)^2(\rho^P)^2 = (v^P)^2 - (v_1)^2.$$

Начальными условиями для этой системы будут

$$\phi^P(t_1) = 0,$$

$$\rho^P(t_1) = v_1 t_1.$$

Решая ее, находим

$$\phi^P(t) = \frac{\sqrt{(v^P)^2 - (v_1)^2}}{v_1} \ln \frac{v_1 t}{v_1 t_1},$$

$$\rho^P(t) = v_1 t.$$

Выразим время как функцию полярного угла

$$t(\phi) = t_1 \exp\left(\frac{v_1 \phi^P}{\sqrt{(V^P)^2 - (v_1)^2}}\right).$$

Таким образом, траектория состоит из прямолинейных участков и участков логарифмической спирали. В [10] доказано, что при движении по спирали встреча произойдет за время, не превышающее время прохождения одного витка. Тогда, если корабль, обойдя виток спирали, не находит подводную лодку, значит первоначальное предположение о скорости убегающего было неверным. Далее выбирается следующая скорость $v_2 \in V^E$. Значит убегающий за время t_2 прошел расстояние $\rho_E(t_2) = v_2 t_2$, а преследователь $\rho_P(t_2) = v_1 t_2$. Если $\rho_P(t_2) > \rho_E(t_2)$, тогда расстояние между игроками будет равно $D_2 = \rho_P(t_2) - \rho_E(t_2)$ и для нахождения момента времени t_3 необходимо решить уравнение

$$v^P(t_3 - t_2) - \int_{t_2}^{t_3} v_2 dt = D_2.$$

После движения по прямолинейному участку преследователь движется по спирали. Преследователю для уменьшения времени целесообразно упорядочить перебор скоростей убегающего по убыванию. Однако, если это становится известно убегающему, он может двигаться с минимальной скоростью, что позволит максимизировать время поиска. Таким образом, получается следующая игра. Множеством стратегий убегающего является множество комбинаций возможных скоростей v_i его движения и направлений движения α. Множество стратегий корабля-перехватчика — это множество всевозможных перестановок элементов V^E. Матрица полученной игры состоит из элементов T, которые являются временем поимки.

3. Теоретико-игровая модель поиска и перехвата нескольких убегающих несколькими преследователями. Предположим, что корабль-перехватчик, имея на борту n катеров с глубинными бомбами в момент t обнаружил на различных расстояниях от него на поверхности моря перископы n подводных лодок, которые в тот же момент совершили погружение под воду и с фиксированными скоростями стали перемещаться прямолинейно в различных направлениях. Требуется отправить катера на перехват подводных лодок оптимальным образом, т. е. так, чтобы сумма гарантированных времен перехвата лодок была бы минимальной. Для решения задачи составим матрицу эффективности $A = (a_{ij})$, элементы которой есть гарантированное время перехвата подлодки j катером i, которое складывается из времени достижения катером точки обнаружения перископа и его полного времени прохождения по логарифмической спирали перехвата. Пусть величины $x_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n$ могут принимать только два значения:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{назначен } i \text{ катер для } j \text{ лодки,} \\ 0, & \text{не назначен } i \text{ катер для } j \text{ лодки.} \end{cases}$$

Математическая формулировка задачи об оптимальных назначениях

$$\min z = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} x_{ij},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leqslant 1, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \geqslant 0.$$

Пример. Пусть корабль-перехватчик обнаружил 4 подводные лодки. Первоначальное расстояние до каждой из них соответственно 100 километров, 200 километров, 50 километров и 163 километра. Преследователь имеет 4 катера для поимки подводных лодок. Максимальная скорость каждого катера соответственно 74 км/ч, 90 км/ч, 178 км/ч и 124 км/ч. Первая лодка движется по прямой $\alpha_1 = 23$, со скоростью $v_1 = 23$км/ч. Соответствующие параметры второй лодки — $\alpha_2 = 137, v_2 = 50$км/ч, третьей — $\alpha_3 = 187, v_3 = 67$ км/ч, четвертой — $\alpha_4 = 50, v_4 = 70$ км/ч. Тогда таблица для задачи о назначениях выглядит следующим образом:

Таблица. Задача о назначениях

1903	386	$9,96$	52
$1,15 \cdot 10^{71}$	$6,4 \cdot 10^{51}$	$1,3 \cdot 10^{34}$	$1,89 \cdot 10^{26}$
$5,6 \cdot 10^{172}$	$1,13 \cdot 10^{90}$	$2 \cdot 10^{32}$	$3,7 \cdot 10^{51}$
$2,4 \cdot 10^{63}$	$7,56 \cdot 10^{26}$	$1,28 \cdot 10^{9}$	$5,96 \cdot 10^{14}$

Элементы матрицы были получены при помощи программы Maple. Игру можно решить венгерским методом.

4. Заключение. Рассмотрен процесс поиска одного или нескольких убегающих. Найдена траектория движения преследователя, перемещение по которой гарантирует встречу с убегающим. Представлен алгоритм поиска времени погони. Решен контрольный пример.

Литература

1. Cournot A. O. Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses. Paris. 1838.

2. Nash J. Non-Cooperative Games // The Annals of Mathematics, Second Series. 1951. Vol. 54. No 2. C. 286–295.

3. Малафеев О. А., Черных К. С. Математическое моделирование развития компании // Экономическое возрождение России. 2004. № 1. С. 60.

4. Григорьева К. В., Малафеев О. А. Динамический процесс кооперативного взаимодействия в многокритериальной (многоагентной) задаче почтальона // Вестник гражданских инженеров. 2011. № 1. С. 150–156.

5. Алферов Г. В. Генерация стратегии робота в условиях неполной информации о среде // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. Пермь. 2003. № 35. С. 4–24.

6. Григорьева К. В., Иванов А. С., Малафеев О. А. Статическая коалиционная модель инвестирования инновационных проектов // Экономическое возрождение России. 2011. № 4. С. 90–98.

7. Колокольцов В. Н., Малафеев О. А. Динамические конкурентные системы многоагентного взаимодействия и их асимптотическое поведение (часть I) // Вестник гражданских инженеров. 2010. № 4. С. 144–153.

8. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.

9. Малафеев О. А., Зубова А. Ф. Математические и компьютерное моделирование социально-экономическим систем на уровне многоагентного взаимодействия. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006. 1006 с.

10. Петросян Л. А., Гарнаев А. Ю. Игры поиска. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1992. 216 с.